Feuille d'Exercices X
Calcul Stochastique

Exercice 1. Soit B un mouvement brownien standard. On considère les processus suivants pour $\mu \neq 0$ et $\sigma \neq 1$.

$$X_t = \mu t + B_t, \quad Y_t = \sigma B_t.$$

1. Montrer que $\mathbb{P}\left(\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0\right) = 1$.

2. On a vu en classe que $\mathbb{P}^X$ et $\mathbb{P}^B$ sont deux mesures équivalents en prenant $t \in [0,T]$. Montrer que $\mathbb{P}^X$ et $\mathbb{P}^B$ sont mutuellement singulières lorsque l'on considère les processus pour tout $t \geqslant 0$. Il suffit de montrer qu'il existe un événement $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}^X(A) = 0$ et $\mathbb{P}^B(A) = 1$.

3. Montrer que $\mathbb{P}^Y$ et $\mathbb{P}^B$ sont mutuellement singulières même en prenant $t \in [0,T]$.

Exercice 2. Soit B un mouvement brownien standard et $\theta > 0$. On a vu dans une feuille d'exercices précédente que $\sup_{t>0}(B_t - \theta t) \sim \mathrm{Exp}(2\theta)$. On va le remontrer en utilisant la théorie de Girsanov.

1. On considère $Z_t = \exp(2\theta B_t - 2\theta^2 t)$. Montrer que si pour un $T > 0$, $\mathrm{d}\mathbb{Q} = Z_T \mathrm{d}\mathbb{P}$ alors $\mathbb{Q}$ est une mesure de probabilité et si $\tilde{B}_t = B_t - 2\theta t$ alors $\tilde{B}$ est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien.

2. Montrer que $(Z_t^{-1})_t$ est une $\mathbb{Q}$-martingale.

3. Soit $R > 0$, et $\tau_R = \inf\{t \geqslant 0, B_t - \theta t = R\}$. Montrer que $\mathbb{P}(\tau_R \leqslant T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{\{\tau_R < t\}} Z^{-1}_{T\wedge\tau_R}]$ et que l'on a $\mathbb{P}(\tau_R \leqslant T) = \mathrm{e}^{-2\theta R}\mathbb{Q}(\tau_R \leqslant T)$.

4. Montrer que $\mathbb{P}(\tau_R < \infty) = \mathrm{e}^{-2\theta R}$ et donc que $\sup_{t>0} B_t - \theta t$ suit une loi exponentielle de paramètre 2θ.

Exercice 3. Soit B un mouvement brownien. Le but de l'exercice est de calculer $J_\lambda = \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda \int_0^t |B_s|^2 \mathrm{d}s\right)\right]$

1. Soit $Z_t = \exp\left(\theta \int_0^t B_s \mathrm{d}B_s - \frac{\theta^2}{2}\int_0^t |B_s|^2 \mathrm{d}s\right)$. Montrer que $\mathbb{E}[Z_t] = 1$ pour tout $t \geqslant 0$.

2. Soit $\mathbb{Q}$ la mesure de probabilité $\mathrm{d}\mathbb{Q} = Z_T \mathbb{P}$. Montrer que b est un $\mathbb{Q}$-processus d'Ornstein–Uhlenbeck sur $[0,T]$. Donner la $\mathbb{Q}-$espérance et la $\mathbb{Q}$-fonction de covariance de X_t.

3. Montrer que si $\lambda = -\frac{\theta^2}{2}$ et $t \leqslant T$ alors $J_\lambda = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\exp(-\frac{\theta}{2}(|B_t|^2 - t))]$.

4. Calculer J_λ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. Nous allons prouver que le mouvement brownien en deux dimensions écrira vos prénoms avec probabilité positive. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ une paramétrisation de votre prénom. On veut donc prouver que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \|B_t - g(t)\| \leqslant \varepsilon\right) > 0.$$

1. On considère $X_t^{(a,b)} = \sqrt{b-a}\left(B_{a+\frac{t}{b-a}} - B_a\right)$. Montrer que X est un mouvement brownien standard en dimension 2.

2. On considère les évévements $A_k = \left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\left\|X_t^{(a_k,b_k)} - g(t)\right\| \leqslant \varepsilon\right\}$ avec $a_k = \frac{1}{2^{k+1}}$ et $b_k = \frac{1}{2^k}$. Montrer que les évenements $(A_k)_k$ sont indépendants et que l'on a $\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(A_1)$. Montrer que si $\mathbb{P}(A_1) > 0$ alors la suite d'événements A_k se réalisera infiniment souvent avec probabilité 1.

3. On suppose que quelqu'un a une signature ponctuelle, c'est-à-dire que $g(t) = (0,0)$ pour tout $t \in [0,1]$. Montrer que $\mathbb{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |B_t| \leqslant \varepsilon\right) > 0$.

4. En utilisant un théorème de Girsanov, montrer que $\mathbb{P}(A_1) > 0$ et donc que le mouvement brownien écrira votre prénom avec probabilité positive.

Igor Vladimirovitch Girsanov
(1934–1967)

Alexander Novikov
(1946–)